ÁLGEBRA BOOLEANA

Foi um modelo formulado por George Boole, por volta de 1850.

Observando a lógica proposicional e a teoria de conjuntos verificamos que elas possuem propriedades em comum.

Lógica Proposicional

1a. $A \vee B = B \vee A$	1b. $A \wedge B = B \wedge A$	(propriedades comutativas)
2a. $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$	2b. $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$	(propriedades associativas)
3a. $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	3b. $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	(propriedades distributivas)
4a. $A \vee F = A$	4b. $A \wedge V = A$	(propriedades de identidade)
5a. $A \vee \neg A = V$	5b. $A \wedge \neg A = F$	(propriedades de complemento)

Teoria de Conjuntos

1a. $A \cup B = B \cup A$	1b. $A \cap B = B \cap A$	(propriedades comutativas)
2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	(propriedades associativas)
3a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	3b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	(propriedades distributivas)
4a. $A \cup \emptyset = A$	4b. $A \cap S = A$	(propriedades de identidade)
5a. $A \cup A' = S$	5b. $A \cap A' = \emptyset$	(propriedades de complemento)

Definição:

Uma **álgebra booleana** é um conjunto *B* no qual são definidos duas operações binárias (+ e .) e uma operação unária (’ , às vezes representada como um traço sobre a expressão submetida a ela; exemplo: A’ poderia ser

representado como $\overline{A}$) e no qual existem dois elementos distintos 0 e 1 tais que valem as seguintes propriedades para todo A, B e C pertencentes a *B*:

1a) A + B = B + C	1b) A . B = B . C	(propriedades comutativas)
2a) (A + B) + C = A + (B + C)	2b) (A . B) . C = A . (B . C)	(propriedades associativas)
3a) A + (B . C) = (A + B) . (A + C)	3b) A . (B + C) = (A . B) + (A . C)	(propriedades distributivas)
4a) A + 0 = A	4b) A. 1 = A	(propriedades de identidade)
5a) A + A’ = 1	5b) A . A’ = 0	(propriedades de complemento)

Denotamos uma álgebra booleana por [*B*, +, ·, ’, 0, 1].

Exemplo: Seja *B* = {0, 1} e as operações + e . definidas em *B* como A + B = max(A, B) e x · y = min(A, B). E seja ’ definida pela tabela:

A	A’
0	1
1	0

Para verificarmos se as propriedades são válidas, basta testarmos todas as possibilidades possíveis para cada uma.

Teorema da Unicidade do Complemento
Para qualquer x na álgebra booleana, se existir um x_1 tal que $A + A_1 = 1$ e $A . A_1 = 0$, então $A_1 = A'$.

Existem outras propriedades que valem para qualquer álgebra booleana:

6a) A + A = A	6b) A . A = A	(propriedades idempotentes)
7a) A + 1 = 1	7b) A . 0 = 0	(propriedades de identidade)
8a) A + (A . B) = A	8b) A . (A + B) = B	(propriedades de absorção)
9a) (A + B)’ = A’ . B’	9b) (A . B)’ = A’ + B’	(leis de De’Morgan)
10a) 0’ = 1	10b) 1’= 0	(propriedades de complemento)
11) (A’)’ = A		

Exercício
Prove que:
a) A . [B + (A . C)] = (A . B) + (A . C)
b) (A + B) . (A’ + B) = B
c) (A + B) + (B . A’) = A + B

Expressões Booleanas

Uma expressão booleana com n variáveis, x_1, x_2, ..., x_n, é uma cadeia finita de símbolos formados pela aplicação das seguintes regras:

1. x_1, x_2, ..., x_n são expressões booleanas.
2. Se P e Q são expressões boolenas, então (P + Q), (P . Q) e (P’) também são.

Exemplos de expressões booleanas

(((A + B) ’) . C)

((A’ + (B . C)’) + D)

Função-Verdade

Uma função-verdade é uma função *f* tal que f:$\{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ para algum inteiro $n \geq 1$.

A tabela-verdade para a operação booleana + descreve uma função-verdade *f* com n = 2.

$f(0, 0) = 0$, $f(0, 1) = 1$, $f(1, 0) = 1$, $f(1, 1) = 1$.

A tabela-verdade para a operação booleana . descreve outra função-verdade para n = 2.

$f(0, 0) = 0$, $f(0, 1) = 0$, $f(1, 0) = 0$, $f(1, 1) = 1$

O operador booleano ’ descreve outra função para n = 1.

$f(0) = 1$, $f(1) = 0$

Qualquer expressão booleana define uma única função-verdade.

Exemplo:
A expressão booleana (A + B') . (A + C), define uma função-verdade f tal que $f:\{0,1\}^3 \rightarrow \{0,1\}$.
$f(0, 0, 0) = 0$
$f(0, 0, 1) = 1$
$f(0, 1, 0) = 0$
$f(0, 1, 1) = 0$
$f(1, 0, 0) = 1$
$f(1, 0, 1) = 1$
$f(1, 1, 0) = 1$
$f(1, 1, 1) = 1$

Redes Lógicas

Imagine que as voltagens transmitidas entre os fios possam assumir dois valores, um alto e o outro baixo, representados por 1 e 0.
Suponha ainda que existem dispositivos básicos denominados portas ou (or), porta e (and) e inversor (ou porta não, ou porta not), que se comportam como o "ou", o "e" e o " ' " da lógica proposicional.
Essas portas são representadas pelos símbolos:

Porta OR

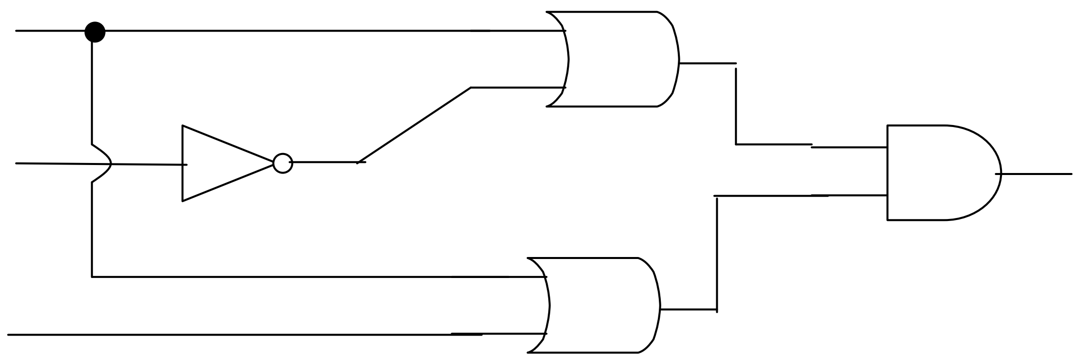
Porta AND

Inversor

Redes e expressões

Combinando portas AND, OR e inversores, podemos construir uma rede lógica que represente uma expressão booleana.

A rede lógica para a expressão booleana (A + B’) . (A + B) é:



Exercícios

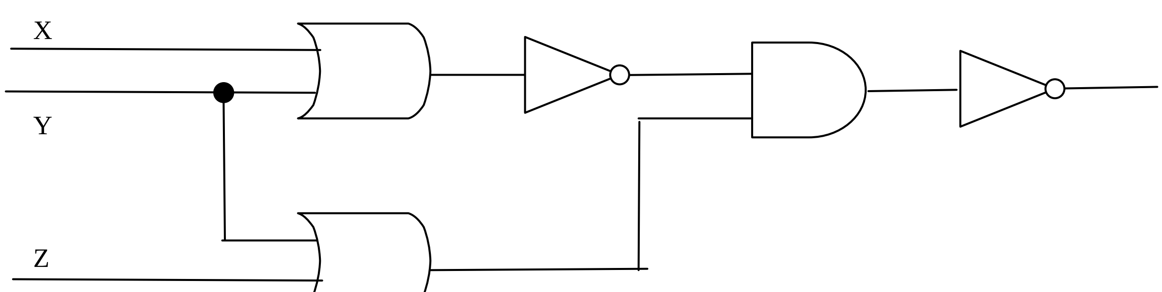
1. Projete uma rede lógica para cada expressão booleana a seguir:

a) A’ . B

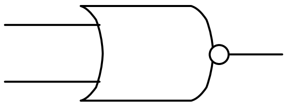
b) (A + B) . (B + C)’

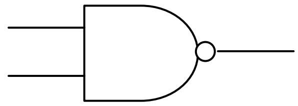
c) ((A + B’) . (B + C’))’

2. Escreva uma expressão booleana para:

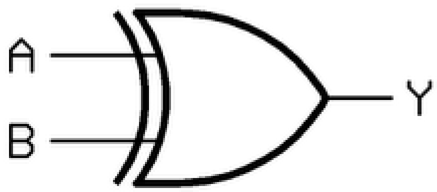


Outras portas lógicas





Porta NOR **Porta NAND**



Porta XOR

Forma Canônica

Objetivo: Encontrar uma expressão booleana que corresponda a uma função-verdade arbitrária.

Expressões booleanas tais como x ou y’ consistindo de simples variáveis ou de seu complemento são denominadas **literais**.

Um **mintermo** em n varáveis é o produto de n literais, onde cada literal envolve uma variável diferente.

Um mintermo é uma expressão booleana que só retorna 1 para uma única combinação de 0’s e 1’s.

As expressões AB’C e A’B C’são mintermos com três variáveis A, B e C.
Sendo que AB’C só retorna 1 se x = 1, y = 0 e z =1.

A expressão AC em não é um mintermo em três variáveis A, B e C, mas é um mintermo em duas variáveis x e z.

A expressão ABA’C não é um mintermo em três variáveis A, B, C.

A tabela a seguir lista os 8 elementos de $\{0, 1\}^3$ e os correspondentes mintermos que tomam o valor 1 para o elemento indicado.

A B C	
(0, 0, 0)	A’B’C’
(0, 0, 1)	A’B’C
(0, 1, 0)	A’BC’
(0, 1, 1)	A’BC
(1, 0, 0)	AB’C’
(1, 0, 1)	AB’C
(1, 1, 0)	ABC’
(1, 1, 1)	ABC

Para encontrarmos uma expressão para uma determinada função-verdade basta somarmos os mintermos obtidos para cada situação onde a função retorne valor 1.

Exemplo: Seja a função-verdade *f* como $f:\{0,1\}^3 \rightarrow \{0,1\}$, definida pela tabela.

A B C	*f*(A, B, C)
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	0

Uma expressão booleana correspondente seria A’BC’ + AB’C’ + AB’C + ABC’.

Esta expressão booleana, correspondente à função-verdade, e formada pela soma de mintermos é denominada **forma canônica de mintermos** ou **forma normal disjuntiva**.

Exercício:

Encontre a forma canônica de mintermos de:

a. AB + A’B’ com 3 variáveis A, B e C.

b. C.(A + B’) com 3 variáveis A, B, C.

c.

A B C	*f*(A, B, C)
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	0
1 1 1	1

Minimização

Circuitos lógicos representam expressões booleanas. Portanto, é interessante simplificar expressões booleana para obtermos circuitos simplificados.

Vamos utilizar um procedimento que permite obter uma soma de produtos mínima.

Esta soma de produtos, não necessariamente, é a expressão mais simples.

Exemplo: Seja a expressão

ABC + A'BC + A'BC'

Uma soma de produtos mínima equivalente seria

BC + A'B

No entanto, esta expressão é equivalente a B.(C + A') que requer um número menor de portas lógicas na construção de sua rede lógica.

Exercício:

Simplifique as expressões booleanas a seguir para que elas tenham o número indicado de literais.

a. A'B' + AB + A'B - dois literais

b. (A + B).(A + B') - 1 literal

c. A'B + AB' + AB + A'B' - 1 literal